Aufgabe 1

Die Binomialverteilung $B(k,\vartheta)$ hat die allgemeine Form (k sei die Gesamtzahl der Beobachtungen, l die Anzahl der günstigen Beobachtungen):

$$P(Y=i)=\binom{k}{l}\cdot\vartheta^{l}\cdot(1-\vartheta)^{k-l}$$

Laut Aufgabenstellung ist $k=1$. Das bedeutet, dass nur zwei mögliche Realisierung für eine Beobachtung existieren:

$$y_i=\begin{cases}0 & \textit{günstig}\\ 1 & \textit{ungünstig}\end{cases}$$

Ebenso wird vorausgesetzt, dass die $Y_i \sim B(1,\vartheta)$ verteilt sind, so dass aufgrund der Unabhängigkeit

$$P_\vartheta(y_1,\ldots,y_n)=P(Y_1=y_1)\cdot\ldots\cdot P(Y_n=y_n)$$

gilt. Für $i=1$ ist:

$$P(Y_1=y_1)=\vartheta^{y_1}\cdot(1-\vartheta)^{1-y_1}$$

Allgemein ergibt sich:

$$\Pi P(Y_n=y_n)=\vartheta^{\sum y_i}\cdot(1-\vartheta)^{n-\sum y_i}$$

Setzt man $t=\sum_{i=1}^{n}y_i$, dann vereinfacht sich der Ausdruck zu

$$P_\vartheta(y_1,\ldots,y_n)=\vartheta^{t}\cdot(1-\vartheta)^{n-t}$$

Die Maximum-Likelihood-Schätzung bestimmt man nun durch Differentiation nach ϑ:

$$\begin{aligned}&\frac{d}{d\vartheta}\vartheta^{t}\cdot(1-\vartheta)^{n-t}\\ &=t\cdot\vartheta^{t-1}\cdot(1-\vartheta)^{n-t}-\vartheta^{t}\cdot(n-t)\cdot(1-\vartheta)^{n-t-1}\\ &=\vartheta^{t-1}\cdot(1-\vartheta)^{n-t-1}\cdot[t\cdot(1-\vartheta)-\vartheta\cdot(n-t)]\end{aligned}$$

Die Nullstellen sind:

$$0=\hat{\vartheta}^{t-1}\cdot\left(1-\hat{\vartheta}\right)^{n-t-1}\cdot\left[t\cdot\left(1-\hat{\vartheta}\right)-\hat{\vartheta}\cdot(n-t)\right]$$

$$\hat{\vartheta}_1=0$$

$$\hat{\vartheta}_2=1$$

$$0=t\cdot\left(1-\hat{\vartheta}_3\right)-\hat{\vartheta}_3\cdot(n-t)$$

$$\hat{\vartheta}_3=\frac{t}{n}=\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}y_i=\overline{y}$$

Die drei Nullstellen sind aber nicht notwendigerweise auch Maximalstellen. Deshalb ist es erforderlich, auch noch die zweite Ableitung an den Stellen $\hat{\vartheta}_1$, $\hat{\vartheta}_2$ und $\hat{\vartheta}_3$ zu berechnen. Dies vollständig durchzuführen ist mir zu platzaufwändig, das kann der Computer sowieso viel besser, ich gebe hier nur die Lösungen in Kurzform an:

$$f''\left(\hat{\vartheta}_1\right)=f''\left(\hat{\vartheta}_2\right)=0$$

$$f''\left(\hat{\vartheta}_3\right)<0$$

Man sieht, dass sowohl $\hat{\vartheta}_1$ als auch $\hat{\vartheta}_2$ Sattelstellen sind, nur $\hat{\vartheta}_3$ ist ein echtes Maximum. Die gesuchte Maximum-Likelihood-Schätzung $\hat{\vartheta}$ für ϑ ist daher

$$\hat{\vartheta} = \bar{y},$$

d.h. es ist die relative Häufigkeit der günstigen Ereignisse in der Messreihe.

Der Erwartungswert ist:

$$\begin{aligned} ET_\vartheta(Y) &= \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} EY_i \\ &= \frac{1}{n} \cdot n \cdot \vartheta \\ &= \vartheta \end{aligned}$$

Und die Varianz:

$$\begin{aligned} Var\,T_\vartheta(Y) &= Var\left(\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} Y_i\right) \\ &= \frac{1}{n} \cdot Var\,Y_i \\ &= \frac{\vartheta \cdot (1-\vartheta)}{n} \end{aligned}$$

Für hinreichend viele Wiederholungen (also großes n) nähert sich die Varianz der Null an.

Die Untersuchung des MSE führt darauf hinaus, dass sowohl $T(y) = y_1$ als auch $\tilde{T}(y) = \hat{\vartheta}(y) = \bar{y}$ erwartungstreu sind, d.h. der MSE nur von der Varianz abhängt. Im direkten Vergleich ergibt sich:

$$MSE\,T(y) = Var\,T(y) = Var\,Y_1 = \vartheta \cdot (1-\vartheta)$$

$$MSE\,\tilde{T}(y) = Var\,\tilde{T}(y) = \frac{\vartheta \cdot (1-\vartheta)}{n}$$

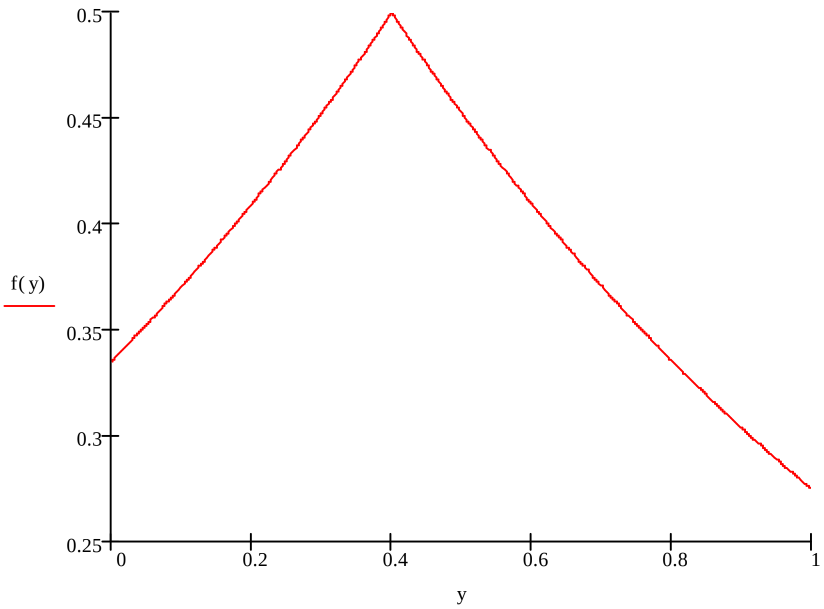
Schon für $n = 2$ ist der mittlere quadratische Fehler der MLS kleiner und deshalb zu bevorzugen.

Aufgabe 2

Aufgrund der Betragsstriche ist die Funktion nicht stetig, was heißt, dass sie auch nicht differenzierbar ist.

$$f_\vartheta(y;\vartheta)=\frac{1}{2}\cdot e^{-|y-\vartheta|}$$

Ich habe für $\vartheta=0,4$ eine derartige Dichte zeichnen lassen:



Sie ist - aufgrund der Betragsstriche - spiegelsymmetrisch zu $y=\vartheta$. Gleichzeitig ist $f_\vartheta(\vartheta)=0,5$.
Zwei Dichten mit $\vartheta_1=\vartheta$ und $\vartheta_2=\vartheta+\delta$ unterscheiden sich lediglich durch eine Verschiebung um $\delta\in R$ entlang der x-Achse.

Die gemeinsame Dichte von $Y=(Y_1,...,Y_{10})$ ist

$$\prod_{i=1}^{10} f_\vartheta(y_i)=\frac{1}{2^{10}}\cdot e^{-\sum_{i=1}^{10}|y_i-\vartheta|}$$

Da e^x streng monoton wächst, muss der Exponent minimiert werden:

$$\max_\vartheta f_\vartheta(y_1,...,y_{10})=\min_\vartheta \sum_{i=1}^{10}|y_i-\vartheta|$$

An dieser Stelle überlege ich mir die möglichen Intervalle, in denen ϑ liegen kann. Dabei gehe ich zuerst davon aus, dass $\vartheta\in(y_1,y_2)$:

$$\begin{aligned}H(\vartheta)&:=\sum_{i=1}^{10}|y_i-\vartheta|\\&=(\vartheta-y_1)+(y_2-\vartheta)+(y_3-\vartheta)+...+(y_{10}-\vartheta)\\&=-8\vartheta-y_1+y_2+y_3+...+y_{10}\end{aligned}$$

Als nächste vermute ich $\vartheta \in (y_2, y_3)$:

$$H(\vartheta) := \sum_{i=1}^{10} |y_i - \vartheta|$$
$$= (\vartheta - y_1) + (\vartheta - y_2) + (y_3 - \vartheta) + \ldots + (y_{10} - \vartheta)$$
$$= -6\vartheta - y_1 - y_2 + y_3 + \ldots + y_{10}$$

Man kann dieses Spielchen nun noch für alle anderen möglichen Intervalle durchführen und kommt dann zu dem Schluss, dass $H(\vartheta)$ aus jeweils linearen Funktionen besteht, die ihr Minimum im Intervall $\vartheta \in (y_5, y_6)$ haben. Genau diese Eigenschaft erfüllt auch der Median, der aber nicht immer mit dem arithmetischen Mittel überstimmt.

Ich stelle den Median hier als $q_{0,5}$-Quantil dar:

$$\hat{\vartheta} = q_{0,5}$$