## Aufgabe 1

Tabellarisch kann man gut die für das Ereignis A (erster Wurf keine 6) bzw. Ereignis B (zweiter Wurf eine 6) günstigen Fälle erkennen:

| 1\2 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | | |
| 2 | | | | | | |
| 3 | | | | | | |
| 4 | | | | | | |
| 5 | | | | | | |
| 6 | | | | | | |

Sei g(X) die Anzahl der günstigen Fälle für das Ereignis X, dann erhält man:

$$\# A = 30$$

$$\# B = 6$$

$$\# A \cap B = 5$$

Die dazugehörigen Wahrscheinlichkeiten betragen:

$$P(A) = \frac{30}{36} = \frac{5}{6}$$

$$P(B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

$$P(A \cap B) = \frac{5}{36}$$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{5}{36}}{\frac{5}{6}} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} \approx 16{,}7\%$$

Es ist ersichtlich, dass die Gesamtwahrscheinlichkeit $P(B|A) = P(B)$. Dieser Zusammenhang ist auch logisch zwingend, da die Ereignisse voneinander unabhängig sind, d.h. zwischen den einzelnen Ereignissen A und B keinerlei wahrscheinlichkeitsrelevante Verbindung besteht.

## Aufgabe 2

Erneut benutze ich eine farbige Tabelle, diesmal ist Ereignis A das Werfen einer 6 im zweiten Versuch, Ereignis B, dass die Augensumme genau 9 ist.

| 1\2 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | | |
| 2 | | | | | | |
| 3 | | | | | | |
| 4 | | | | | | |
| 5 | | | | | | |
| 6 | | | | | | |

Diesmal sind:

$$\#A = 6$$

$$\#B = 4$$

$$\#A \cap B = 1$$

Für die Wahrscheinlichkeiten bedeutet das:

$$P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

$$P(B) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{36}$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{36}}{\frac{1}{9}} = \frac{1}{4} = 25\%$$

**Aufgabe 3**

Diese Aufgabe löse ich, indem ich anhand eines Gegenbeispiels zeige, dass die Aussage nicht für alle beliebigen A und B zutrifft. Dabei beziehe ich mich auf die vorherige Aufgabe 2.

$$\#\overline{B} = \#\Omega - \#B = 36 - 4 = 32$$

$$\#A \cap \overline{B} = \#A - \#A \cap B = 6 - 1 = 5$$

$$P\left(A \middle| \overline{B}\right) = \frac{P\left(A \cap \overline{B}\right)}{P\left(\overline{B}\right)} = \frac{\frac{5}{36}}{\frac{32}{36}} = \frac{5}{32}$$

Die Summe ist dann:

$$P\left(A \middle| B\right) + P\left(A \middle| \overline{B}\right) = \frac{1}{4} + \frac{5}{32} = \frac{13}{32} \neq 1$$

Damit ist gezeigt worden, dass nicht für alle A und B die Aussage zutrifft.

**Aufgabe 4**

Die Ereignisse A, B und C sind paarweise unabhängig, d.h. Antwort a) ist korrekt:
- tritt A ein, so kann man bzgl. B oder C keinerlei Aussage über den 1.Wurf machen
- tritt B ein, so kann man bzgl. A oder C keinerlei Aussage über den 2.Wurf machen
- tritt C ein, so kann man bzgl. A oder B keinerlei Aussage über den 3.Wurf machen

Sie sind jedoch nicht vollständig unabhängig, da das gleichzeitig Eintreten von A und B das Ereignis C automatisch impliziert. Genauso sieht es beim gleichzeitigen Eintreten von A und C für B und von B und C für A aus.

Will man die Beweisführung in einem strengeren mathematischen Sinne führen, so nutzt man die spezielle Eigenschaft der Multiplikationsregel aus:

(im folgenden steht *w* für Wappen und *z* für Zahl)

$$\Omega = \{(w,w,w),(w,w,z),(w,z,w),(w,z,z),(z,w,w),(z,w,z),(z,z,w),(z,z,z)\}$$
$$\#\Omega = 8$$
$$A = \{(w,w,w),(z,w,w),(w,z,z),(z,z,z)\}$$
$$\#A = 4$$
$$B = \{(w,w,w),(w,z,w),(z,w,z),(z,z,z)\}$$
$$\#B = 4$$
$$C = \{(w,w,w),(w,w,z),(z,z,w),(z,z,z)\}$$
$$\#C = 4$$

a) paarweise unabhängig:
Es ist zu zeigen, dass $P(X \cap Y) = P(X) \cdot P(Y)$ gilt, wobei $X$ und $Y$ stellvertretend für alle Kombinationen von A, B und C stehen.

$$A \cap B = A \cap C = B \cap C = \{(w,w,w),(z,z,z)\}$$
$$\# A \cap B = \# A \cap C = \# B \cap C = 2$$
$$P(A \cap B) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P(A) \cdot P(B)$$
$$P(A \cap C) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P(A) \cdot P(C)$$
$$P(B \cap C) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P(B) \cdot P(C)$$

Da die Multiplikationsregel für alle Fälle erfüllt wird, sind die Ereignisse tatsächlich paarweise unabhängig.

b) vollständig unabhängig:
Die vollständige Unabhängigkeit ist strenger definiert als die paarweise Unabhängigkeit. Diesmal muss $P(X \cap Y \cap Z) = P(X) \cdot P(Y) \cdot P(Z)$ auch erfüllt sein.

$$A \cap B \cap C = \{(w,w,w),(z,z,z)\}$$
$$\# A \cap B \cap C = 2$$
$$P(A \cap B \cap C) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{8} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$$