Aufgabe 1

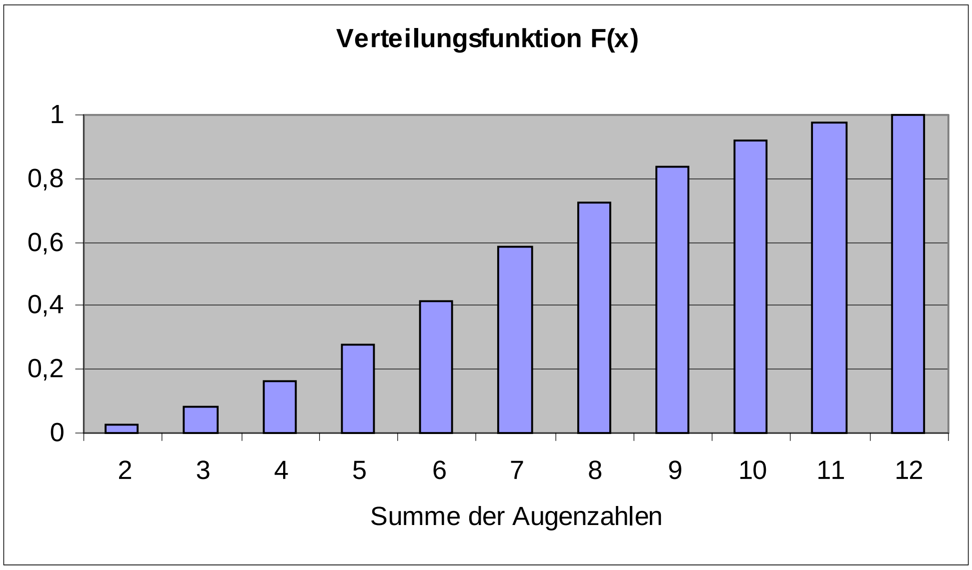
Die Summe der Augenzahlen bei zwei Würfeln verteilt sich nach folgendem Schema:

1\2	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Ich definiere eine Zufallsgröße $Z:(\omega_1,\omega_2)\rightarrow\omega_1+\omega_2$, die den Grundraum $\Omega=\{2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$ hat. Die dazugehörigen Häufigkeiten betragen:

i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
#Z(i)	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1
p_i	$^1/_{36}$	$^2/_{36}$	$^3/_{36}$	$^4/_{36}$	$^5/_{36}$	$^6/_{36}$	$^5/_{36}$	$^4/_{36}$	$^3/_{36}$	$^2/_{36}$	$^1/_{36}$

Die jeweiligen Wahrscheinlichkeiten erhält man, indem man die Häufigkeit eines Ereignisses durch die Summe der Häufigkeiten aller Ereignisse dividiert, in dem gegebenen Fall ist dies 36. Es entsteht dadurch dieses Diagramm für die Verteilungsfunktion:



Der Erwartungswert $EX:=\sum_{i=2}^{12}x_i\cdot p_i$ ist demzufolge:

$$\begin{aligned}EX&=\frac{1}{36}\cdot 2+\frac{2}{36}\cdot 3+\frac{3}{36}\cdot 4+\frac{4}{36}\cdot 5+\frac{5}{36}\cdot 6+\frac{6}{36}\cdot 7+\frac{5}{36}\cdot 8+\frac{4}{36}\cdot 9+\frac{3}{36}\cdot 10+\frac{2}{36}\cdot 11+\frac{1}{36}\cdot 12\\&=\frac{2+6+12+20+30+42+40+36+30+22+12}{36}\\&=\frac{252}{36}\\&=7\end{aligned}$$

Aufgabe 2

$$f(x) = \binom{n}{x} \cdot \frac{1}{2^n}, \quad x = 0,1,\ldots,n$$

Der Binomialkoeffizient ist definiert als

$$\binom{a}{b} = \frac{a!}{(a-b)! \cdot b!}, \quad \binom{a}{0} = 1 \text{ und } \binom{a}{b} = 0 \text{ für } a < b.$$

Letzterer Fall ist in der Definition der Funktion ausdrücklich verboten und daher für die weitere Betrachtung irrelevant. Die erste Gleichung setzt sich nur aus Fakultäten zusammen, die wiederum stets nicht-negativ sind. Wenn man in der allgemeinen ersten binomischen Formel

$$(x+y)^a = \sum_{b=0}^{a} \binom{a}{b} \cdot x^{a-b} \cdot y^b$$

$x = y = 1$ einsetzt, so erhält man das Ergebnis

$2^a = \sum_{b=0}^{a} \binom{a}{b}$ woraus sofort $\sum_{x=0}^{n} f(x) = 1$ folgt..

Aus diesen beiden Eigenschaften lässt sich weiter ableiten, dass $f(x) \in [0,1]$.

Aufgabe 3

Die einzelnen Wahrscheinlichkeiten der Funktion $f(i) = \frac{6 - |i-7|}{36}$ für $i = 2,\ldots,12$ betragen:

i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$f(i)$	$^1/_{36}$	$^2/_{36}$	$^3/_{36}$	$^4/_{36}$	$^5/_{36}$	$^6/_{36}$	$^5/_{36}$	$^4/_{36}$	$^3/_{36}$	$^2/_{36}$	$^1/_{36}$

Man erkennt sofort, dass es sich um die Funktion handelt, die den Sachverhalt aus Aufgabe 1 darstellt. Deshalb muss der Erwartungswert ebenfalls 7 sein.

Die Varianz $VarX = \sigma^2$ ermittelt man mit Hilfe der Formel $\sigma^2 = \sum_{i=2}^{12} (i-7)^2 \cdot f(i)$. Man erhält:

$$\begin{aligned}
\sigma^2 &= 25 \cdot \frac{1}{36} + 16 \cdot \frac{2}{36} + 9 \cdot \frac{3}{36} + 4 \cdot \frac{4}{36} + 1 \cdot \frac{5}{36} + 0 \cdot \frac{6}{36} + 1 \cdot \frac{5}{36} \\
&\quad + 4 \cdot \frac{4}{36} + 9 \cdot \frac{3}{36} + 16 \cdot \frac{2}{36} + 25 \cdot \frac{1}{36} \\
&= \frac{25+32+27+16+5+0+5+16+27+32+25}{36} \\
&= \frac{35}{6} \approx 5{,}8\overline{3}
\end{aligned}$$