Aufgabe 1

Ich verwende zur Vereinfachung der Rechnungen nicht die Maßeinheit *mm*, sondern *dm*.
Die Normalverteilung N(4,1) hat dann eine Dichte von:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}(x-4)^2}$$

Zur Ermittlung der gefragten Wahrscheinlichkeiten führe ich die Verteilung auf die standardisierte Normalverteilung N(0,1) zurück. Somit bin ich in der Lage, die gegebene Tabelle verwenden zu können und erspare mir aufwändiges Integrieren:

$$Y = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

$$\Phi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{u} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

a) Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass es in einem Jahr weniger als 300 mm, d.h. 3 dm regnet, liegt bei ungefähr 16%:

$$Y = \frac{3-4}{1} = -1$$

$$\Phi(-1) = 1 - \Phi(1)$$
$$= 1 - 0{,}841 = 0{,}159$$

b) Deutlich höher ist die Wahrscheinlichkeit für mehr als 425 mm (entsprechen 4,25 dm) pro Jahr, sie erreicht über 40%:

$$P(Z > 4{,}25) = 1 - P(Z \le 4{,}25)$$

$$Y = \frac{4{,}25 - 4}{1} = 0{,}25$$

$$\Phi(0{,}25) = 0{,}599$$

$$P(Z > 4{,}25) = 1 - P(Z \le 4{,}25)$$
$$= 1 - 0{,}599 = 0{,}401$$

Zur Berechnung ermittelte ich die Wahrscheinlichkeit des komplementären Ereignisses, der Wahrscheinlichkeit für weniger als bzw. genau 425 mm. Die Differenz zu 1 (=100%) ist der gesuchte Zahlenwert.

c) Die Grundidee ähnelt der aus Aufgabe b), ich berechne die Wahrscheinlichkeit des komplementären Ereignisses. Zusätzlich mache ich von der Stetigkeit der Verteilung Gebrauch:

$$P(Z < a) = P(Z \le a) = 0{,}95$$

$$Y = \frac{a-4}{1} = 0{,}95$$

$$a = 5{,}645$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von 95% fallen maximal 564,5 mm Niederschlag pro Jahr. Da die Normalverteilung symmetrisch bezüglich μ ist, ist die Abweichung d vom Jahresmittel identisch mit der für die 95% Wahrscheinlichkeit der Mindest-Niederschlagsmenge:

$$d = \mu - (5{,}645 - \mu) = 2\mu - 5{,}645 = 2{,}355$$

Es fallen somit min. 235,5 mm Niederschlag mit einer Sicherheit von 95%.

Aufgabe 2

Der zur Aufgabenstellung komplementäre Intervall $\left(-\frac{n}{2},\frac{n}{2}\right)$ für $n\in Z$ umfasst je nach n unterschiedlich viele Elemente. Besondere Beachtung verdient die dabei die 0, sie taucht einmal auf, alle anderen Elemente sich sowohl als positive, als auch als negative Zahlen vertreten. Der Intervall $\left[-n,n\right]$ besteht aus $2n+1$ Elementen. Allgemein sieht die Formel wie folgt aus:

$$P\left(|X|\geq\frac{n}{2}\right)=\frac{\#\left[-n,n\right]-\#\left(-\frac{n}{2},\frac{n}{2}\right)}{\#\left[-n,n\right]}=\frac{2n+1-\#\left(-\frac{n}{2},\frac{n}{2}\right)}{2n+1}$$

Die Unterscheidung in gerade und ungerade n führt zu:

$$\begin{aligned}P_{n=2k}\left(|X|\geq\frac{n}{2}\right)&=\frac{2n+1-\#\left(-\frac{n}{2},\frac{n}{2}\right)}{2n+1}\\&=\frac{2n+1-n}{2n+1}\\&=\frac{n+1}{2n+1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P_{n=2k+1}\left(|X|\geq\frac{n}{2}\right)&=\frac{2n+1-\#\left(-\frac{n}{2},\frac{n}{2}\right)}{2n+1}\\&=\frac{2n+1-(n-1)}{2n+1}\\&=\frac{n+2}{2n+1}\end{aligned}$$

Beide Wahrscheinlichkeiten konvergieren für hinreichend große n gegen $\frac{1}{2}$, wobei sie sich dieser Grenze von oben nähern.

Die Tschebyscheff-Ungleichung erfordert die Bestimmung von μ, σ^2 und ε:

$$\begin{aligned}
\mu &= \frac{1}{2n+1} \cdot \sum_{i=-n}^{n} x_i \\
&= 0 \\
\sigma^2 &= \frac{2}{2n+1} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2} \\
&= \frac{2}{2n+1} \cdot \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6} \\
&= \frac{n \cdot (n+1)}{3} \\
\varepsilon &= \frac{n}{2}
\end{aligned}$$

$$P\left(|X - \mu| \geq \frac{n}{2} \right) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

$$\begin{aligned}
P\left(|X - 0| \geq \frac{n}{2} \right) &\leq \frac{\frac{n \cdot (n+1)}{3}}{\frac{n^2}{4}} \\
&= \frac{4}{3} \cdot \frac{n+1}{n}
\end{aligned}$$

Für hinreichend große n strebt die Wahrscheinlichkeit gegen $\frac{4}{3}$.

Diesem Zahlenwert kann man allerdings keine weitere Aussage entnehmen, da Wahrscheinlichkeiten größer als 1 nicht definiert sind und die Tschebyscheff-Ungleichung uns somit einen tautologischen Wert liefert.

Aufgabe 3

In der Dreipunktverteilung gilt:

$$P(|X-a|\geq 3) = P(X=a-3) + P(X=a+3)$$

$$= \frac{1}{18} + \frac{1}{18} = \frac{1}{9}$$

Die Anwendung der Tschebyscheff-Ungleichung erfordert die Bestimmung von μ und σ^2:

$$\mu = \sum_{i=1}^{3} x_i * p_i$$

$$= (a-3) * \frac{1}{18} + (a+3) * \frac{1}{18} + a * \frac{16}{18}$$

$$= a$$

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{3} (x_i - \mu)^2 * p_i$$

$$= (a-a)^2 * \frac{16}{18} + (a-3-a)^2 * \frac{1}{18} + (a+3-a)^2 * \frac{1}{18}$$

$$= 1$$

$$\varepsilon = 3$$

$$P(|X-\mu|\geq \varepsilon) = P(|X-a|\geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

$$P(|X-\mu|\geq 3) = P(|X-a|\geq 3) \leq \frac{1}{9}$$

Die Tschebyscheff-Ungleichung liefert in diesem Fall die exakte Grenze, obwohl sie im allgemeinen eine zu großzügige Abschätzung ergibt.