Aufgabe 1

Aus den Voraussetzungen $EY_1 = EY_2 = \mu$ und $VarY_1 = VarY_2 = \sigma^2$ sowie $T(y_1, y_2) = a_1 y_1 + a_2 y_2$ und der geforderten Erwartungstreue folgt, dass:

$$ET_\vartheta(Y_i) = ET_\vartheta(Y_1, Y_2) = \gamma(\vartheta) \text{ und}$$
$$a_1 EY_1 + a_2 EY_2 = \mu$$

Letztere Gleichung stellt eine wichtige Beziehung zwischen a_1 und a_2 her:

$$\begin{aligned} a_1\mu + a_2\mu &= \mu \\ a_1 + a_2 &= 1 \\ a_2 &= 1 - a_1 \end{aligned}$$

Für die Varianz findet sich eine ähnliche Gleichung:

$$\begin{aligned} Var_\vartheta T &= Var_\vartheta(a_1 Y_1 + a_2 Y_2) \\ &= Var_\vartheta(a_1 Y_1) + Var_\vartheta(a_2 Y_2) \\ &= a_1^2 Var_\vartheta Y_1 + a_2^2 Var_\vartheta Y_2 \\ \sigma^2 &= a_1^2 \sigma_1^2 + a_2^2 \sigma_2^2 \end{aligned}$$

Als nächstes bestimme ich aus den gewonnenen Gleichung eine Funktion, die die Abhängigkeiten zwischen den a_i ausdrückt. Da dazu auf jeden Fall auch die σ_i^2 notwendig sind, erhalte ich eine Extremwertaufgabe, deren globales Minimum die gesuchte Stelle ist (ich ersetze gleich a_2 durch a_1):

$$\begin{aligned} \min_{a_1} \sigma^2 &= \min_{a_1} f(a_1) \\ &= a_1^2\sigma_1^2 + (1-a_1)^2 \cdot \sigma_2^2 \\ f'(a_1) &= 2a_1\sigma_1^2 - 2\sigma_2^2 \cdot (1-a_1) \\ &= 2a_1\sigma_1^2 + 2a_1\sigma_2^2 - 2\sigma_2^2 \\ 0 &= a_1\sigma_1^2 + a_1\sigma_2^2 - \sigma_2^2 \\ \sigma_2^2 &= a_1 \cdot (\sigma_1^2 + \sigma_2^2) \\ \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} &= a_1 \end{aligned}$$

Nun muss noch kurz überprüft werden, dass es sich auch tatsächlich um ein Minimum handelt:

$$\begin{aligned} f''(a_1) &= 2\sigma_1^2 + 2\sigma_2^2 \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

Für $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = 0$ ist $\sigma^2 = 0$ und damit minimal, dieser Sonderfall braucht also nicht weiter betrachtet werden.

Den Koeffizienten a_2 erhält man nun sehr schnell:

$$1-a_2 = a_1$$

$$1-a_2 = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}$$

$$(1-a_2)\cdot(\sigma_1^2+\sigma_2^2)=\sigma_2^2$$

$$-a_2\cdot(\sigma_1^2+\sigma_2^2)+\sigma_1^2+\sigma_2^2=\sigma_2^2$$

$$-a_2\cdot(\sigma_1^2+\sigma_2^2)+\sigma_1^2=0$$

$$\sigma_1^2=a_2\cdot(\sigma_1^2+\sigma_2^2)$$

$$\frac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}=a_2$$

Die minimale Varianz hat demzufolge die Funktion:

$$T_\vartheta(y_1,y_2)=\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\cdot y_1+\frac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\cdot y_2$$

Aufgabe 2

Gesucht wird die Schätzfunktion $T(Y)$. Für das geometrisch verteilte Y gilt:

$$P(Y=r)=(1-\vartheta)^{r-1}\cdot\vartheta \quad \text{mit } r=1,2,\ldots$$

Der Erwartungswert ist:

$$\begin{aligned} E_\vartheta T(Y) &= \sum_{r=1}^{\infty} T(r)\cdot P(Y=r) \\ &= \sum_{r=1}^{\infty} T(r)\cdot(1-\vartheta)^{r-1}\cdot\vartheta \\ &= \vartheta \end{aligned}$$

Die letzte Aussage folgt aus der Erwartungstreue. Damit lässt sich vereinfachen:

$$\sum_{r=1}^{\infty} T(r)\cdot(1-\vartheta)^{r-1}\equiv 1$$

Als nächstes führe ich einen Koeffizientenvergleich von zwei Potenzreihen durch. Es ist bekannt, dass $\sum_{r=0}^{\infty} a_r\cdot x^r=\sum_{i=0}^{\infty} b_i\cdot x^i$ für $\forall x$ nur für $a_0=b_0$, $a_1=b_1$, ... allgemein $a_j=b_j$ gilt. Wenn man diese Aussage auf die letzte Gleichung anwendet, findet man:

$$T(1)+T(2)\cdot(1-\vartheta)+\ldots\equiv 1$$

Eine immerwahre Aussage entsteht nur dann, wenn $T(1)=1$ und für alle $r\neq 1$ $T(r)=0$ gilt.

Aufgabe 3

Die identisch und unabhängig verteilten Realisierungen $Y_1,...,Y_{18}$ sind normalverteilt:

$$EY_i = \mu$$
$$VarY_i = \sigma^2$$
$$Y_i \sim N(\mu, \sigma^2)$$

Weiter ist:

$$s_n^2(Y) = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \overline{Y})^2$$
$$\sum_{i=1}^{n} (Y_i - \overline{Y})^2 \sim \sigma^2 \chi_{n-1}^2$$

Die zu bestimmende Wahrscheinlichkeit hat die Form:

$$\begin{aligned}
P\left(\frac{1}{2}\sigma^2 \le s_n^2(Y) \le 2\sigma^2\right) &= P\left(\frac{1}{2}\sigma^2 \le \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \overline{Y})^2 \le 2\sigma^2\right) \\
&= P\left(\frac{n-1}{2} \cdot \sigma^2 \le \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \overline{Y})^2 \le 2\sigma^2 \cdot (n-1)\right) \\
&= P\left(\frac{17}{2} \cdot \sigma^2 \le \sum_{i=1}^{18} (Y_i - \overline{Y})^2 \le 34\sigma^2\right) \\
&= P\left(\frac{17}{2} \le \frac{1}{\sigma^2} \cdot \sum_{i=1}^{18} (Y_i - \overline{Y})^2 \le 34\right) \\
&= P\left(\frac{1}{\sigma^2} \cdot \sum_{i=1}^{18} (Y_i - \overline{Y})^2 \le 34\right) - P\left(\frac{1}{\sigma^2} \cdot \sum_{i=1}^{18} (Y_i - \overline{Y})^2 \le \frac{17}{2}\right)
\end{aligned}$$

Unter Verwendung einer Tabelle der χ_n^2-Verteilung erhält man die (interpolierten) Werte:

$$P(\chi_{17}^2 > 34) \approx 0{,}008$$
$$P(\chi_{17}^2 > 8{,}5) \approx 0{,}96$$

So ist:

$$\begin{aligned}
P\left(\frac{1}{2}\sigma^2 \le s_{18}^2(Y) \le 2\sigma^2\right) &= \left(1 - P(\chi_{17}^2 > 34)\right) - \left(1 - P(\chi_{17}^2 > 8{,}5)\right) \\
&\approx 0{,}992 - 0{,}04 \\
&\approx 0{,}95
\end{aligned}$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. 95% kann davon ausgegangen werden, dass die Stichprobenvarianz zwischen $\frac{\sigma^2}{2}$ und $2\sigma^2$ liegt.

Aufgabe 4

Die allgemeine Formel zur Bestimmung des Stichprobenkorrelationskoeffizienten lautet:

$$r = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var\overline{X}} \cdot \sqrt{Var\overline{Y}}}$$

$$= \frac{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}_n\right)\left(Y_i - \overline{Y}_n\right)}{\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}_n\right)^2} \cdot \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i - \overline{Y}_n\right)^2}}$$

In der angegebenen Messreihe ist $n = 6$. Die arithmetischen Mittel $\overline{X}_n$ bzw. $\overline{Y}_n$ sind:

$$\overline{X}_n = \frac{1}{6} \cdot (1{,}0 + 1{,}3 + 1{,}5 + 2{,}5 + 2{,}9 + 1{,}8)$$

$$= \frac{11}{6} \approx 1{,}8\overline{3}$$

$$\overline{Y}_n = \frac{1}{6} \cdot (2{,}1 + 2{,}5 + 2{,}8 + 3{,}3 + 6{,}5 + 2{,}9)$$

$$= \frac{67}{20} = 3{,}35$$

Um die Korrelation leichter bestimmen zu können, ermittle ich jetzt die Resultate der Terme $X_i - \overline{X}_n$ und deren Quadrate sowie die Entsprechungen für Y (ich runde dabei auf 4 Nachkommastellen):

In einer Tabellenkalkulation kann man dann durchrechnen lassen:

Term \ i	1	2	3	4	5	6
Xi	1,0	1,3	1,5	2,5	2,9	1,8
Yi	2,1	2,5	2,8	3,3	6,5	2,9
Xi-Xn	-0,83333333	-0,53333333	-0,33333333	0,66666667	1,06666667	-0,03333333
Yi-Yn	-1,3	-0,9	-0,6	-0,1	3,2	-0,5
(Xi-Xn)(Yi-Yn)	1,04166667	0,45333333	0,18333333	-0,03333333	3,36	0,015
(Xi-Xn)^2	0,69444444	0,28444444	0,11111111	0,44444444	1,13777778	0,00111111
(Yi-Yn)^2	1,5625	0,7225	0,3025	0,0025	9,9225	0,2025
Summe(Xi-Xn)(Yi-Yn)	5,02					
Summe(Xi-Xn)^2	2,67333333					
Summe(Yi-Yn)^2	12,715					

Daraus ergibt sich für den Stichprobenkorrelationskoeffizienten:

$$r \approx \frac{1{,}0047}{\sqrt{0{,}534667 \cdot 2{,}543}} \approx 0{,}8616$$

Die dazugehörige Verteilungsfunktion für x_i: